Estimación de Riesgo en Carteras de Inversión

Mauricio Zevallos

amadeus@ime.unicamp.br

Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Coloquio Argentino de Estadística 2007

22-24 de Octubre, Mar del Plata

Contenidos

1.1.

Introducción[1]

- Riesgo de Mercado
- Antecedentes históricos
- Valor en Riesgo (VaR)
- Importancia del VaR
- Ruta de estudio

Introducción

- Riesgo de Mercado
- Antecedentes históricos
- Valor en Riesgo (VaR)
- Importancia del VaR
- Ruta de estudio

Introducción

- El Riesgo es inherente a toda actividad financiera
- *Riesgo de Mercado*: riesgo de variaciones en los precios de acciones, tasas de cambio, tasas de interés, índices, comodities, etc.

Introducción

- *Lunes Negro*, Octubre de 1987

  Rentabilidad negativa de 23 % en un dia
  1 trillón de USD de pérdida
- LTCM, 1998

  2 billones de USD de pérdida
- Crisis Asiática, 1997
- Crisis Rusa, 1998
- Crisis del Mercado Inmobiliario, 2007

Introducción

- Son necesárias herramientas para medir el Riesgo asociado a alguna operación de inversión.
- Cómo hacerlo?

[1]Mauricio Zevallos, UNICAMP

- En 1994 el banco J.P. Morgan tornó pública una metodologia de control de riesgo conocida como **Riskmetrics**.
- Esta metodologia se originó cuando un director del banco pidió a sus subordinados que elaboren un informe de una página que resuma la pérdida portencial de la institución en las próximas 24 horas.
- Este informe debia ser entregado diariamente a las 4 : 15 pm, es decir, apenas cerraba el mercado. El informe quedó conocido como **Informe 4:15**

Introducción

- Para atender la solicitud del director del banco fué necesario implementar metodologias para,
- Manejo de información: información relevante?
- Procedimientos estadísticos: cuál medida?
- Resultado: **Value at Risk** (VaR)

Introducción

- VaR es una medida de la minima pérdida obtenida en determinado periodo de tiempo (h) con nivel de confianza (p).
- VaR responde a la pregunta: cuánto puedo perder con probabilidad p en un periodo de tiempo h?

Introducción

En las aplicaciones usualmente se trabaja con,

- Niveles de confianza, $p = 0{,}95$, $p = 0{,}99$
- Niveles menores? Dificil validar estadisticamente.
- Horizontes (h) de 1 ó 10 dias.

  el horizonte escogido depende del instrumento financiero.

  el horizonte escogido depende del usuario

Introducción

- En Abril de 1995, el Comité de Basilea de Supervisión de Bancos establece requisitos de *capital adequacy* para bancos comerciales basados en el VaR.
- Bancos tienen que tener capital de riesgo suficiente para cubrir pérdidas de inversiones durante 10 dias el 99 % de las veces.
- En Enero de 1999, SEC en USA establece utilizar modelos de VaR para calcular los requisitos de capital neto.

Introducción

- Comunicación A 2435 del 16/05/1996, con vigencia a partir del 1/09/1996, sobre la **Exigencia de capital para la cobertura de riesgos de mercado**
- Atiende las recomendaciones del acuerdo de Basilea con relación al uso del VaR
- " El intervalo de confianza se fija en un valor de 99 %, o sea 2.32 desvios estándares de los retornos. Con respecto al tiempo para deshacer la posición, al igual que el Comité de Basilea, se establece en un valor fijo minimo de 10 dias "

- Capitulo 2 Conceptos básicos
- Capitulo 3 Métodos para estimar el VaR
  - Modelos de Varianza Condicional Heterocedástica (MVCH)
  - MVCH + Teoria de Valor Extremo (TVE)
  - Regresión Cuantilica
- Capitulo 4 Evaluando el VaR
- Capitulo 5 VaR en carteras
- Capitulo 6 Comentarios finales

Introducción

- Discutiremos
  - Cálculo y evaluación del VaR en acciones y carteras de acciones
- No será discutido
  - Cálculo del VaR en opciones, futuros, y otros instrumentos financieros

Introducción

- Jorion, P. (2001) *Value at Risk*. Second Edition. McGraw Hill.
- McNeil et al (2005) *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, New York.
- Articulos en revistas de Finanzas
- Ver Referencias

2. Valor en Riesgo

2.1.

Valor en Riesgo

- Notación y Convenciones
- Definición del Valor en Riesgo, VaR
- Método Normal
- Método de Simulaciones Históricas
- *Riskmetrics*

Valor en Riesgo

- P_t es el precio de la acción en el instante t
- $rent_t$ es la rentabilidad ó retorno
$$rent_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$
- *log-retornos*
$$lr_t = log(P_t) - log(P_{t-1}) = log(P_t/P_{t-1})$$
- Ejemplo

  Si $P_{t-1} = 100$ y $P_t = 101$
  $rent = 0{,}01$ ó rentabilidad de 1 %

Valor en Riesgo

- $rent_t \approx lr_t$
- Ejemplo (cont.)

  $rent = 1\,\%$
  $lrt = 0{,}99\,\%$

- Trabajaremos con las **pérdidas**

$$r_t = -lr_t$$

Valor en Riesgo

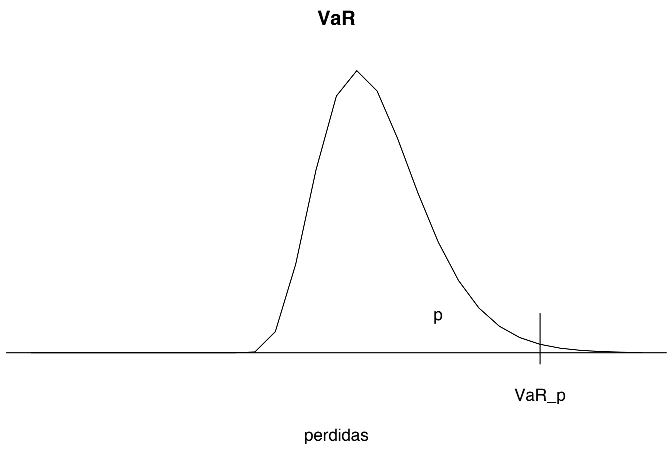
- W = inversión inicial
- r = pérdida, con densidad $f(r)$
- r^* = pérdida con "nivel de confianza" p r^* es el p-quantil,

$$p = P(r < r^*) = \int_{-\infty}^{r^*} f(r)dr$$

- VaR

$$VaR = Wr^*$$

Valor en Riesgo



Valor en Riesgo

- Sea $r \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} p &= P(r < r^*) \\ &= P\left(Z < \frac{r^* - \mu}{\sigma}\right), \quad Z \sim N(0,1) \end{aligned}$$

- Entonces,

$$r^* = \mu + \sigma z_p, \qquad z_p = \Phi(p)$$

- VaR

$$VaR = Wr^* = W(\mu + \sigma z_p)$$

- VaR

$$VaR = W(\mu + z_p\sigma)$$

- VaR 95 %, $p = 0{,}95$

$$VaR = W(\mu + 1{,}65\sigma)$$

- VaR 99 %, $p = 0{,}99$

$$VaR = W(\mu + 2{,}33\sigma)$$

Valor en Riesgo

- A partir de ahora consideramos $W = 1$

$$VaR = r^*$$

- Valor en Riesgo con nivel de confianza p,

$$VaR^p$$

Valor en Riesgo

- Ventaja: simple y fácil de calcular
- Desventaja: subestima el VaR en muchas series financieras.
- Podemos considerar otra distribución distinta a la normal?

Valor en Riesgo

McNeil et al (2005). $W = 10,000$ con $\sigma = 0{,}2/\sqrt{250}$, es decir, volatilidad anualizada de 20 %.

VaR^p			p		
	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
Normal	162.1	208.1	247.9	294.3	325.8
$t_{(4)}$	137.1	190.7	248.3	335.1	411.8

- Diferencias solo para $p \geq 0{,}99$

Valor en Riesgo

- Serie histórica
- **Idea**: la distribución de las pérdidas futuras es muy bien aproximada por la distribución histórica de los datos.
- VaR es simplemente el cuantil de la distribución empírica.

Valor en Riesgo

- $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq, \ldots \leq r_{(n)}$ pérdidas ordenadas
- Estimador consistente,

$$r_p^* = \begin{cases} r_{(i)}, & \text{si} \quad p = p_i, \\ (1-f_i)r_{(i)} + f_i r_{(i+1)}, & \text{si} \quad p_i < p < p_{i+1}, \\ r_{(1)}, & \text{si} \quad p < p_1, \\ r_{(n)}, & \text{si} \quad p > p_n, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_i &= (i - 0{,}5)/n, \quad i = 1, \ldots, n \\ f_i &= (p - p_i)/(p_{i+1} - p_i) \end{aligned}$$

Ejemplo: Perdidas MERVAL

- Enero 1997 - Octubre 2007 (2663 obs)

  $VaR^{0,95} = 3{,}48$
  $VaR^{0,99} = 6{,}79$

- Enero 2007 - Octubre 2007 (193 obs)

  $VaR^{0,95} = 2{,}70$
  $VaR^{0,99} = 4{,}88$

Valor en Riesgo

- Ventajas
  - Simple y fácil de calcular
  - No asumimos distribución paramétrica para las pérdidas
- Desventajas
  - Necesitamos series grandes
  - Cuantiles extremos dificiles de estimar
  - Estimadores con (eventual) poca precisión

Valor en Riesgo

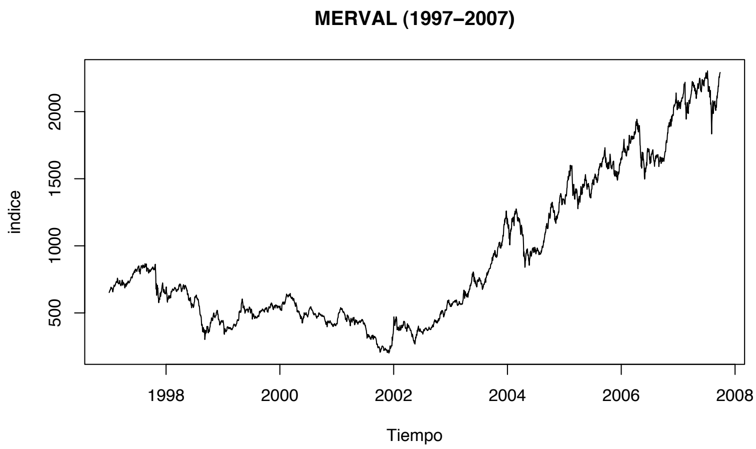
- Los métodos Normal y de SH no consideran que hay periodos de alta y baja volatilidad
- Tenemos que estudiar las caracteristicas empiricas de los retornos:

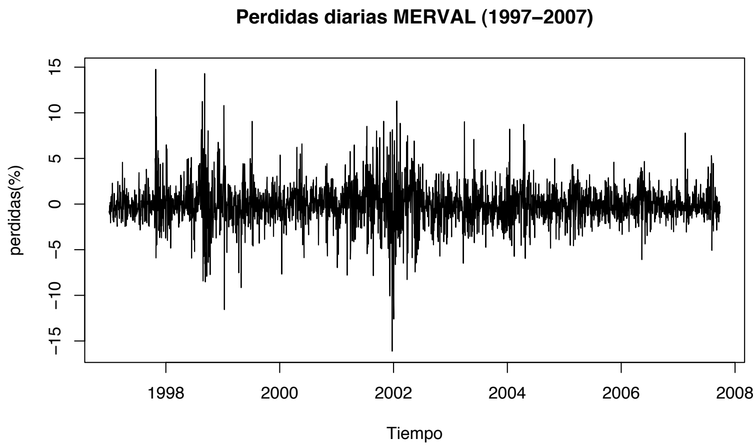
  Caracteristicas Estilizadas

Valor en Riesgo

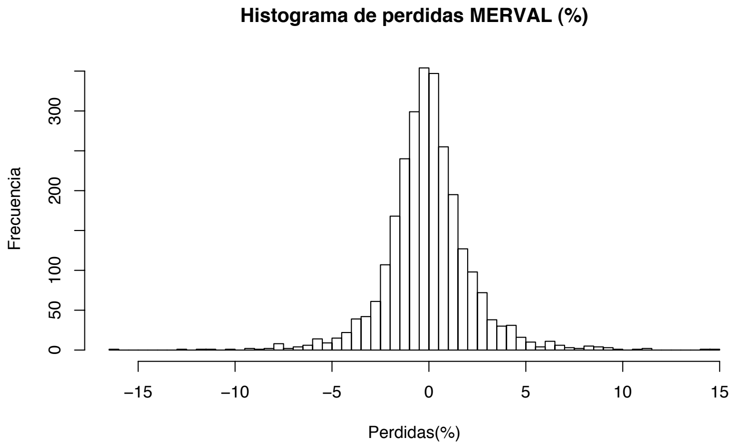
- Indice del Mercado de Valores de Buenos Aires
- Precios de cierre diarios
- Periodo: 3 Enero 1997 $-$ 9 de Octubre 2007
- $n = 2663$ perdidas: $100r_t$

Valor en Riesgo

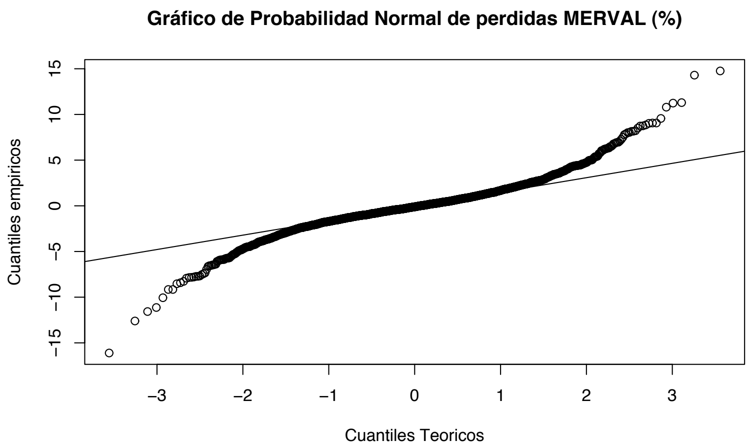


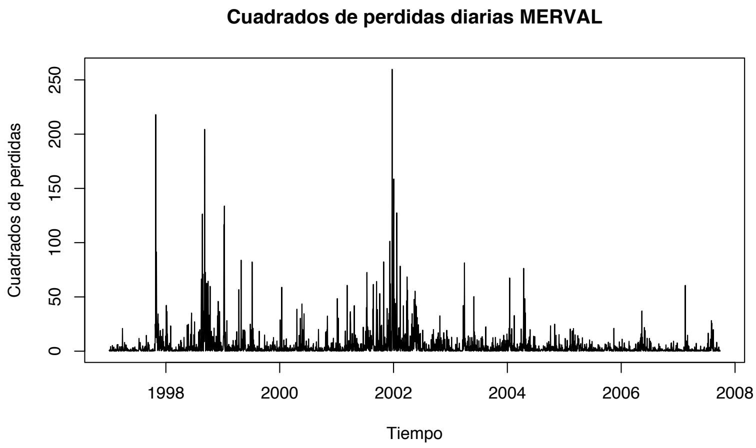


Valor en Riesgo

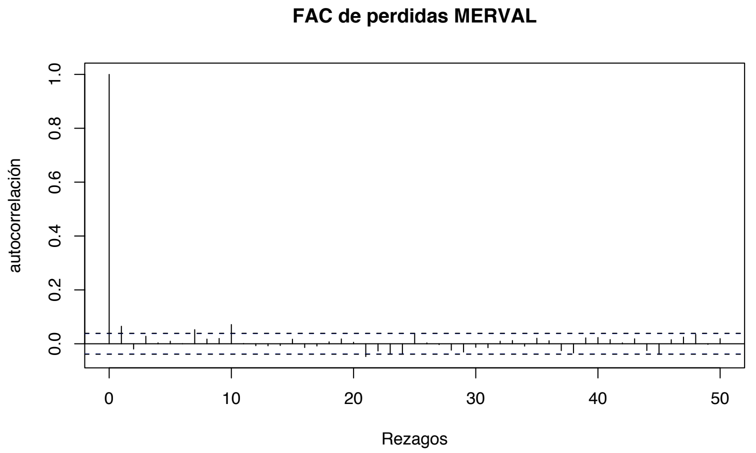


Valor en Riesgo

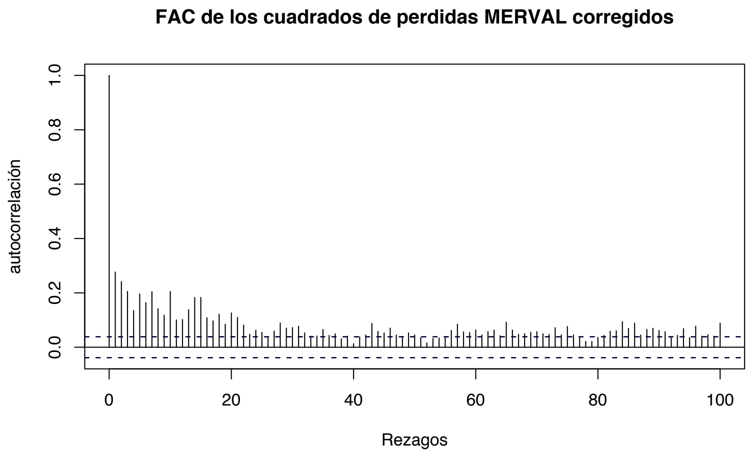




Valor en Riesgo



Valor en Riesgo



- Distribuciones simétricas (al medio)
- Cola de ganancias $\neq$ cola de pérdidas
- Colas pesadas
- Conglomerados de Volatilidad
- Varianzas condicionales que cambian en el tiempo
- Retornos no-correlacionados
- Cuadrados (u otras funciones) correlacionadas *Retornos no son independientes!!*

Valor en Riesgo

- J.P. Morgan
- $\{r_t\}$ serie de pérdidas,
- $\mathcal{F}_{t-1}$ es la información hasta el instante $(t-1)$
- pérdidas tienen distribución Gaussiana *condicional* a su pasado

$$r_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

- varianzas condicionales cambian en el tiempo según

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2, \quad 0 < \lambda < 1$$

con σ_0^2 especificado.

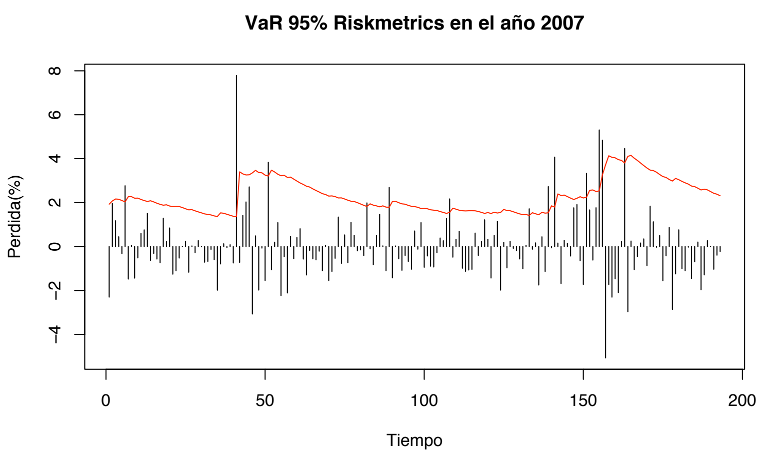
Valor en Riesgo

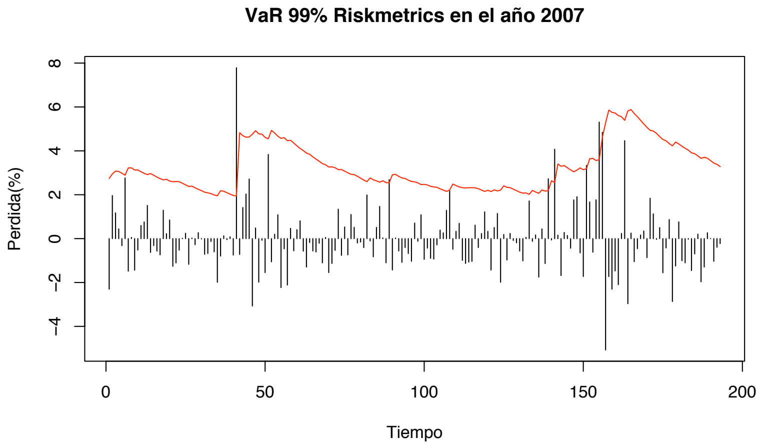
- $\mathrm{VaR}_{t/t-1}^p$ =VaR de nivel de confianza p para el tiempo t condicional a la información hasta $t-1$
- $\mathrm{VaR}_{t/t-1}^p = z_p \sigma_t$
- VaR depende de la volatilidad σ_t
- volatilidad

$$\sigma_t^2 = \lambda^t r_0^2 + (1-\lambda)\left(r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \ldots + \lambda^{t-1} r_0^2\right)$$

- $\lambda = 0{,}94$ utilizando últimos 75 datos

Valor en Riesgo





Valor en Riesgo

- Ventajas

  Simple
  Fácil de calcular y de comparar
  Incorpora cambios en la volatilidad

- Desventajas

  Usualmente subestima el VaR a 99 %
  Distribución condicional mal especificada?
  Dinámica de σ_t^2 mal especificada?

Valor en Riesgo

- Incondicionales
  - Normal
  - Simulaciones Históricas (quantiles)
  - Teoria de Valores Extremos (TVE) incondicional
- Condicionales
  - *Riskmetrics*
  - Métodos Econométricos
  - TVE condicional
  - Regresión Cuantilica

3. Métodos

3.1.

Métodos

- Modelos Econométricos
- Teoria de Valor Extremo
- Regresion Cuantilica

Métodos Econométricos

- Introducción
- Modelos Condicionales Heterocedásticos
- VaR para um modelo simple
- Aplicación

3.3. Modelos Econométricos

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- Modelos Condicionales Heterocedásticos
  - Engle(1982), Premio Nobel de Economia 2003
  - Bollerslev et al (1994)
- VaR condicionales
- Entre otros, Angelidis et al (2004)

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- Sea $\{r_t\}$ proceso de pérdidas
- Sea $\mathcal{F}_t$ información hasta el instante t
- $r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$

  $\mu_t = E[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$, media condicional
  $\sigma_t^2 = V[r_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$, varianza condicional
  $\{\varepsilon_t\}$ IID, $E[\varepsilon_t] = 0$, $V[\varepsilon_t] = 1$, $\varepsilon_t \sim F_\varepsilon$

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- $r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$
- μ_t como AR(1)

  $\mu_t = \delta + \phi r_{t-1}$
- σ_t^2 como GARCH$(1,1)$

  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha(r_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
- Ambas, μ_t y σ_t, son funciones del pasado $\mathcal{F}_{t-1}$

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- **Problema**: dada la información hasta el instante $t-1$, encontrar el VaR^p para el tiempo t
- VaR$^p_{t/t-1}$ es el VaR de nivel de confianza p para el tiempo t condicional a la información hasta $t-1$
- Sea $F_{r_t|\mathcal{F}_{t-1}}$ la FD condicional
- VaR^p tal que,

  $F_{r_t|\mathcal{F}_{t-1}}(\text{VaR}^p) = p$
- Proposición

  $\text{VaR}^p_{t/t-1} = \mu_t + \varepsilon^* \sigma_t$
  donde ε^* es el $p-$cuantil de F_ε

- $$\begin{aligned} F_{r_t|\mathcal{F}_{t-1}}(x) &= P[r_t \leq x \mid \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= P[\mu_t + \sigma_t\varepsilon_t \leq x \mid \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= P[\varepsilon_t \leq (x-\mu_t)/\sigma_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \end{aligned}$$

- ε_t es independiente de $\mathcal{F}_{t-1}$

$$\begin{aligned} F_{r_t|\mathcal{F}_{t-1}}(x) &= P[\varepsilon \leq (x-\mu_t)/\sigma_t] \\ &= F_\varepsilon\left(\frac{x-\mu_t}{\sigma_t}\right) \end{aligned}$$

- con $\varepsilon^* = (\mathrm{VaR}^p - \mu_t)/\sigma_t$,   listo!

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- $\mathrm{VaR}^p_{t/t-1} = \hat{\mu}_t + \varepsilon^*\hat{\sigma}_t$

  $\hat{\mu}_t = \hat{\delta} + \hat{\phi} r_{t-1}$
  $\hat{\sigma}^2_t = \hat{\omega} + \hat{\alpha}(r_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}^2_{t-1}$

- Especificado F_ε, determinamos ε^*
- Los parametros $\theta = (\delta, \phi, \omega, \alpha, \beta)$ del modelo AR(1)-GARCH(1,1) son estimados por máxima verosimilitud

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- Verosimilitud de la muestra $r_1, \ldots, r_n$

  $L(\theta) = f(r_1, \ldots, r_n)$
  $L(\theta) = f(r_1)f(r_2 \mid r_1)\ldots f(r_n \mid r_1, \ldots, r_{n-1})$
  $L(\theta) = f(r_1)\prod_{i=1}^{n-1} f(r_{i+1} \mid \mathcal{F}_i)$

- Usualmente n es grande, entonces trabajamos con la siguiente aproximación de la log-verosimilitud

  $l(\theta) \approx \sum_{i=1}^{n-1} lnf(r_{i+1} \mid \mathcal{F}_i)$

- Supongamos que $\varepsilon \sim NID(0,1)$, entonces

  $r_{i+1} \mid \mathcal{F}_i \sim N(\mu_{i+1}, \sigma^2_{i+1})$

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- Para encontrar el EMV de θ, maximizamos $l(\theta)$, ó equivalentemente, minimizamos $-2l(\theta)$,

$$\hat{\theta} = argmin \sum_{i=1}^{n-1} ln(\sigma^2_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(r_{i+1} - \mu_{i+1})^2}{\sigma^2_{i+1}}$$

- μ_{i+1} y σ^2_{i+1} son funciones de θ
- Algoritmos de minimización

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- Método QMLE: consiste en trabajar con la expresión anterior, aun cuando las perturbaciones no sean Gaussianas.
- Propiedades, Bollerslev & Wooldridge (1992)
  - Estimadores consistentes
  - Distribución normal asintótica
  - Errores estándar válidos bajo no-normalidad

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- Análisis de Residuos para evaluar el ajuste del modelo
- Residuos estandarizados, $e_t = (r_t - \hat{\mu}_t)/\hat{\sigma}_t$
- Verificar,

  e_t no-correlacionados
  e_t^2 no-correlacionados
  $e_t \sim$ normal (si $\varepsilon \sim$ Normal)

Modelos Condicionales Heterocedásticos

- IPSA: Indice de Precios Selectivos de Acciones de Chile
- Periodo: 3 Enero 1990 a 29 de Noviembre 2002
- $n = 3218$ pérdidas (en %)
- Modelo AR(1)-GARCH(1,1)
- $\varepsilon \sim$ Normal
- `SPLUS` 6,2

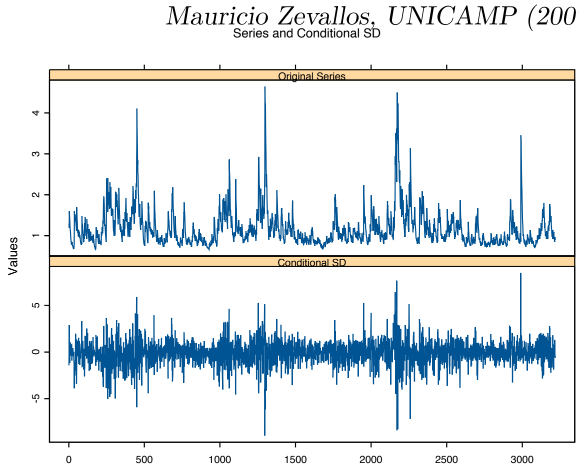
Modelos Condicionales Heterocedásticos

Ajuste AR(1)-GARCH(1,1) para el IPSA

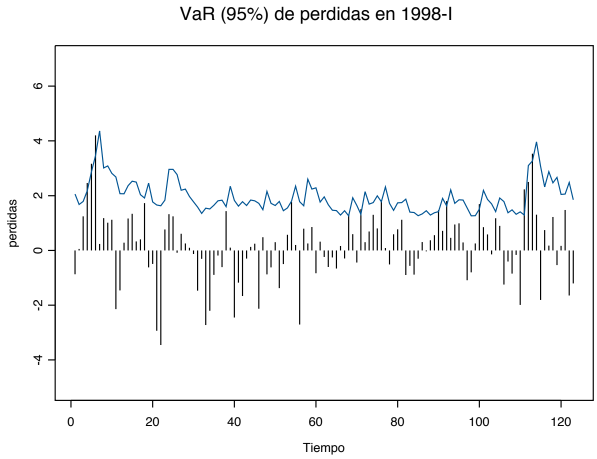
Parámetro	Estimador	e.e	razón-t	Valor-P
δ	-0.05126	0.018674	-2.745	0.003044
ϕ	0.27280	0.017401	15.677	0.000000
ω	0.08577	0.009796	8.755	0.000000
α	0.15807	0.013525	11.688	0.000000
β	0.79030	0.015840	49.894	0.000000

Modelos Condicionales Heterocedásticos

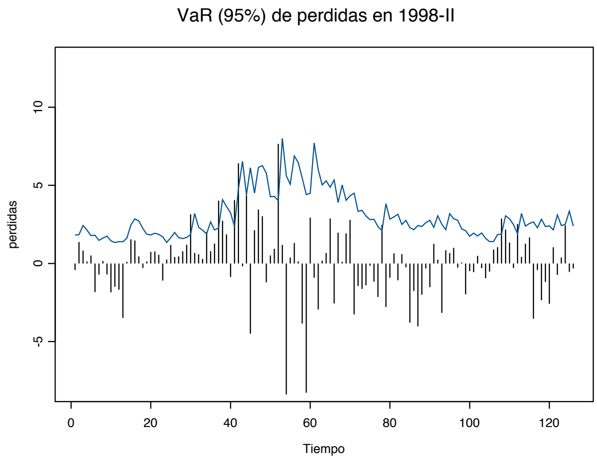
Pérdidas y volatilidad estimada



Modelos Condicionales Heterocedásticos
VaR 95 % en el primer semestre de 1998

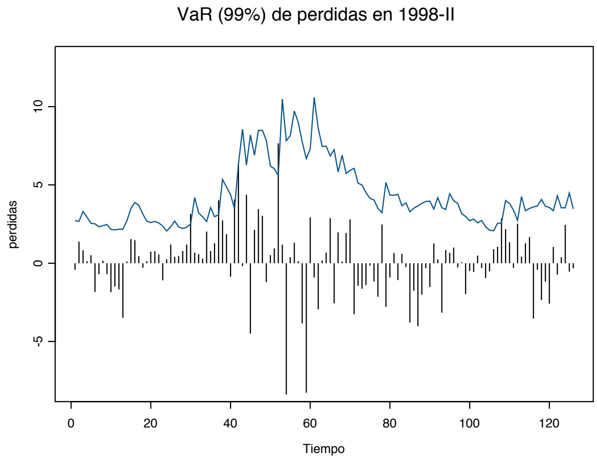


Modelos Condicionales Heterocedásticos
VaR 95 % en el segundo semestre de 1998



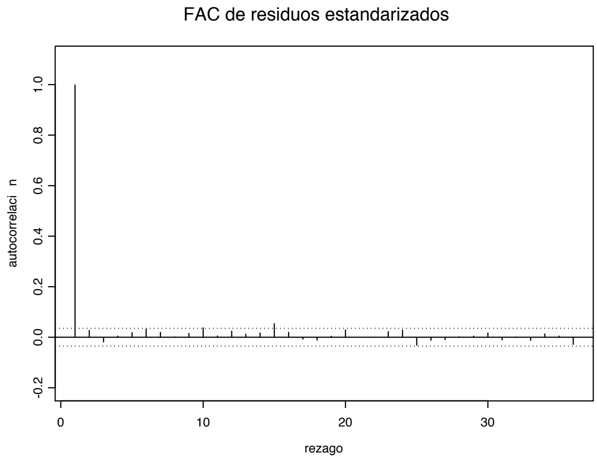
Modelos Condicionales Heterocedásticos

VaR 99 % en el segundo semestre de 1998



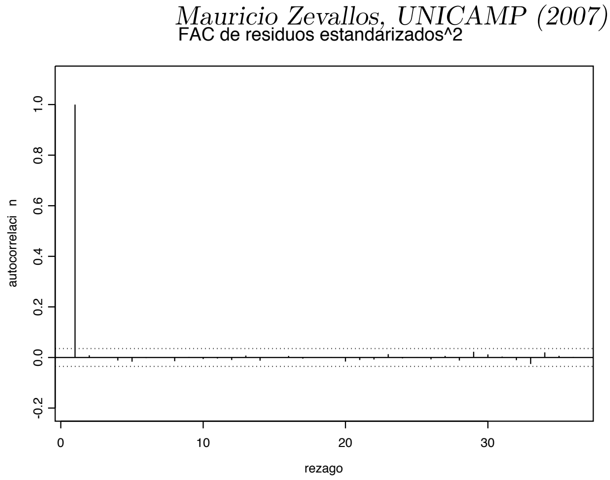
Modelos Condicionales Heterocedásticos

FAC de residuos estandarizados



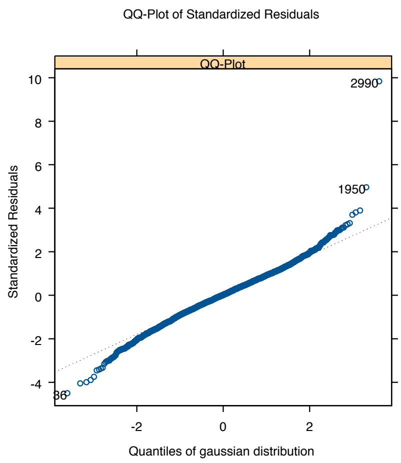
Modelos Condicionales Heterocedásticos

FAC de residuos estandarizados al cuadrado



Modelos Condicionales Heterocedásticos

Gráfico de Probabilidad Normal de residuos estandarizados



Modelos Condicionales Heterocedásticos

Diagnóstico del ajuste AR(1)-GARCH(1,1)

- Modelo captura no-linealidades
- Cola pesada en los residuos

Modelos Condicionales Heterocedásticos

Modelos Econométricos

- $r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$
- Otras especificaciones para la media condicional?

  En general μ_t constante ó AR(1) ó MA(1)
- Otras formas para la varianza condicional

  EGARCH, TGARCH, PGARCH, ...
- Otras distribuciones para ε_t

  t-Student, GED.

Teoria de Valor Extremo

- Introducción
- Método *Peaks Over Threshold* (POT)
- Aplicación

Teoria de Valor Extremo

- Aprovechar los resultados de Teoria de Valor Extremo
- VaR condicionales

  McNeill & Frey (2000)
  Diebold et al (1999)

Teoria de Valor Extremo

- Método *POT*: *peaks* sobre un umbral
- *Idea*: estudiar los eventos extremos
- Serie de pérdidas, r_t
- Modelamos la cola derecha de la distribución

Teoria de Valor Extremo

- X, v.a. de interés con función de distribución F_X
- l es el *umbral* (threshold)
- Y es un *exceso*, es decir, valores $X > l$.

$$Y = X - l, \quad Y > 0$$

- Función de distribución de los excesos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[X - l \leq y \mid X > l], \quad y > 0 \\ &= \frac{P[X - l \leq y, X > l]}{P[X > l]} \end{aligned}$$

Teoria de Valor Extremo

- Función de distribución de los excesos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{P[l < X \leq y + l]}{P[X > l]} \\ &= \frac{F_X(y + l) - F_X(l)}{1 - F_X(l)} \end{aligned}$$

- entonces

$$F_X(y + l) = F_X(l) + F_Y(y)[1 - F_X(l)]$$

- Como $x = y + l$,

$$F_X(x) = F_X(l) + F_Y(y)[1 - F_X(l)] \qquad (1)$$

- Idea : calcular $F_X(x)$ utilizando (1)
- Supongamos que $F_X(l)$ puede ser determinado
- Cuál distribución especificamos para los excesos, $F_Y(y)$?

Teoria de Valor Extremo
Distribuciones de Pareto Generalizadas

- Embrechts et al. (1997): para una clase grande de f.d F_X, es posible encontrar una función medible positiva $\beta(l)$ tal que

$$\lim_{l \to x_o} \sup_{0 \leq y < x_0 - l} \mid F_Y(y) - G_{\xi,\beta(l)}(y) \mid = 0$$

donde $G_{\xi,\beta(l)}$ es la distribución de Pareto Generalizada

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi y/\beta)^{-1/\xi}, & \text{si} \quad \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-y/\beta), & \text{si} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

con $\beta > 0$. Cuando $\xi \geq 0$, $y \geq 0$ y cuando $\xi < 0$, $0 \leq y \leq -\beta/\xi$

Teoria de Valor Extremo
Clase de F_X?

- $\xi > 0$ F_X con cola pesada. Colas decaen como función potencia Pareto, $t-$Student, Cauchy, Burr, log-gamma.
- $\xi = 0$ F_X con cola que decae exponencialmente normal, exponencial, gamma, log-normal
- $\xi < 0$ F_X con soporte acotado uniforme, beta

Teoria de Valor Extremo
Expresión para el cuantil

- Para l grande, de (1)

$$F_X(x) \approx F_X(l) + G_{\xi,\beta}(y)[1 - F_X(l)]$$

- Usualmente en finanzas, $\xi \neq 0$.

$$F_X(x) \approx F_X(l) + \left(1 - (1 + \xi y/\beta))^{-1/\xi}\right)[1 - F_X(l)]$$

- Sea x_p^*, tal que $F_X(x_p^*) = p$

$$\begin{aligned} x_p^* &= F_X^{-1}(p), \\ x_p^* &\approx l + \frac{\beta}{\xi}\left\{\left[\frac{1-p}{1-F_X(l)}\right]^{-\xi} - 1\right\} \end{aligned}$$

Estimación del cuantil

- Muestra $X_1, \ldots, X_n$ IID
- Determinamos $\tilde{l}$ tal que $\hat{F}_X(\tilde{l})$ = cierto valor especificado
- Sea N_{exc} el número de excesos, $\hat{F}_X(l) = (n - N_{exc})/n$
- Muestra de excesos, $Y_i = X_i - l$, para $X_i > \tilde{l}$
- Estimamos β, ξ de la GEP utilizando MV en $Y_1, \ldots, Y_{N_{exc}}$
- cuantil estimado

$$\hat{x}_p^* = \tilde{l} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left\{ \left[\frac{(1-p)n}{N_{exc}} \right]^{-\hat{\xi}} - 1 \right\} \quad (2)$$

Teoria de Valor Extremo

VaR incondicional via TVE

- $X_i = r_i$, pérdidas
- $\mathrm{VaR}^p = \hat{x}_p^*$
- Problema: retornos no son independientes
- Una solución: trabajar con bloques

Teoria de Valor Extremo

VaR condicional via TVE, (CTVE)

- Ajustamos el modelo AR(1)-GARCH(1,1) y obtenemos

  μ_t , σ_t

  e_t = residuos estandarizados
- $X_i = e_i$
- Usualmente $\tilde{l}$ es tal que $\hat{F}_X(\tilde{l}) = 0{,}90$
- $\varepsilon^* = \hat{x}_p^*$
- VaR

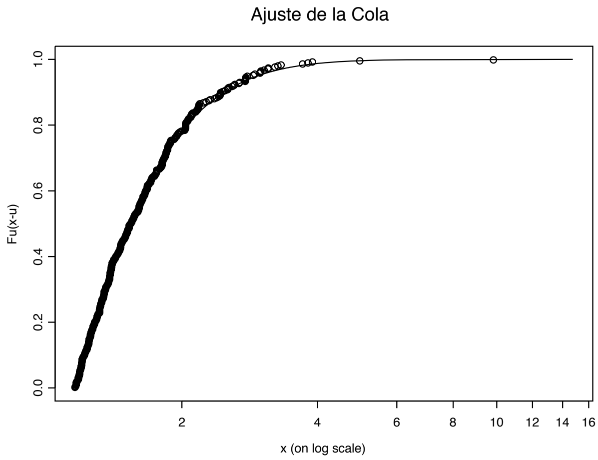
$$VaR^p_{t/t-1} = \hat{\mu}_t + \hat{x}_p^* \hat{\sigma}_t$$

Teoria de Valor Extremo

- Trabajamos con el modelo AR(1)-GARCH(1,1) ajustado anteriormente
- $l = 1{,}1575$ correspondiente a 10 %
- 322 excesos
- Estimación GPD

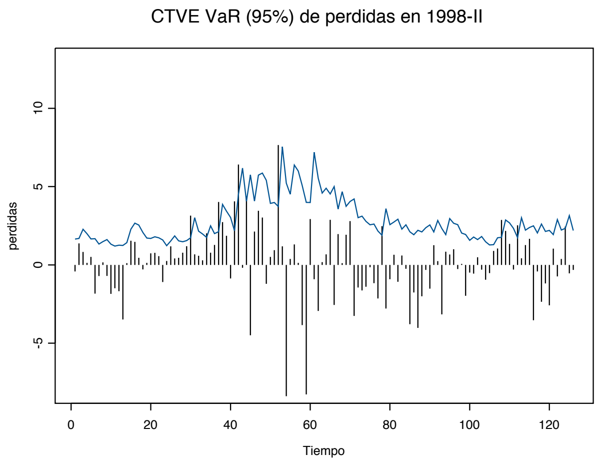
Parámetro	Estimador	e.e
ξ	0.1044	0.0519
β	0.5089	0.0386

Estimación de la cola de residuos estandarizados



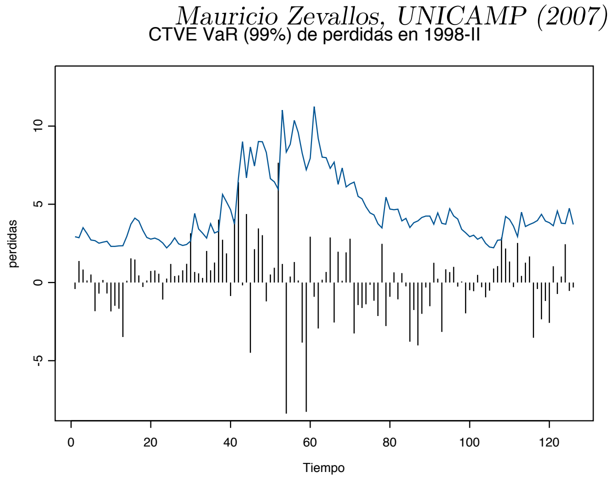
Teoria de Valor Extremo

CTVE VaR 95 % en el segundo semestre de 1998



Teoria de Valor Extremo

CTVE VaR 99 % en el segundo semestre de 1998



Teoria de Valor Extremo
Discusión

- Comparación MEC y CTVE

  $\hat{x}^*_{0,95} = 1{,}523$, (antes 1.645)
  $\hat{x}^*_{0,99} = 2{,}482$, (antes 2.326)

- Comparación con otros estudios

  Fernandez (2003)
  Caro (2004)

3.5. Regresión Cuantilica

Regresión Cuantilica

- **Idea**: en lugar de estimar indirectamente el VaR a través del cálculo de la volatilidad (σ_t), podemos modelar directamente los quantiles.
- Basado en los principios del método de Regresión Cuantilica propuesto Koenker y Basset (1978) para modelos de regresion estáticos.

Regresión Cuantilica

- Engle y Manganelli (2004), Valores en Riesgo Condicionales Autoregresivos: CAViaR
- Generalizacion del modelo *cuantil ARCH* de Koenker y Zhao (1996)

Regresión Cuantilica

- Sea $r_t = \mu_t + \varepsilon_t$
- $Q_t(\alpha)$ es el α-cuantil correspondiente a la distribución condicional de ε_t dado el pasado, es decir $\mathcal{F}_{t-1}$.
- Si la distribucion condicional $r_t|\mathcal{F}_{t-1}$ pertenece a la familia localizacion, entonces

$$VaR_t^p = \mu_t + Q_t(p). \tag{1}$$

- Proceso *simétrico*

$$Q_t(p) = \beta_1 + \beta_2 Q_{t-1}(p) + \beta_3 |\varepsilon_{t-1}|, \tag{2}$$

  VaR$_t$ depende de VaR$_{t-1}$ y de las *noticias* en $t-1$

El vector de parámetros θ, el cual incluye los parámetros de μ_t y los $\beta's$, es estimado minimizando la siguiente expresión:

$$\sum_t [\alpha - I(r_t < VaR_t)] [r_t < VaR_t], \quad (3)$$

donde la funcion $I(A)$ asume valor 1 si se cumple A y es cero en otro caso. Engle y Manganelli (2004) muestran que los estimadores obtenidos satisfazen el Teorema de Limite Central.

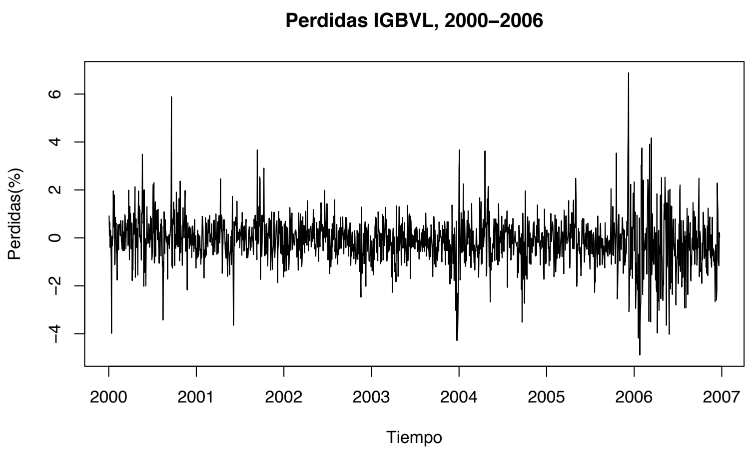
Regresión Cuantilica

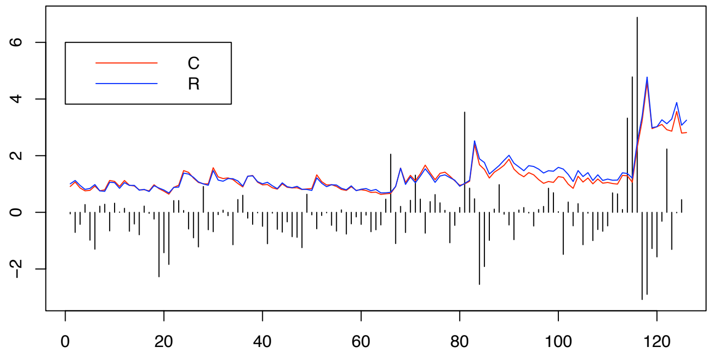
- Dado que estamos modelando directamente los cuantiles, en teoria, el metodo CAViaR seria mas robusto a especificaciones del proceso de retornos, especialmente a cambios en la distribución condicional.
- Otras $Q_t(p)$,
  - Koenker e Zhao (1996)
    $$Q_t(p) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_j |\varepsilon_{t-i}|$$
  - *Asimétrico*: considera el caracter asimétrico de las noticias
    $$Q_t(p) = \beta_1 + \beta_2 Q_{t-1}(p) + \beta_3 max\{\varepsilon_{t-1}, 0\} + \beta_4 max\{-\varepsilon_{t-1}, 0\}.$$

Regresión Cuantilica

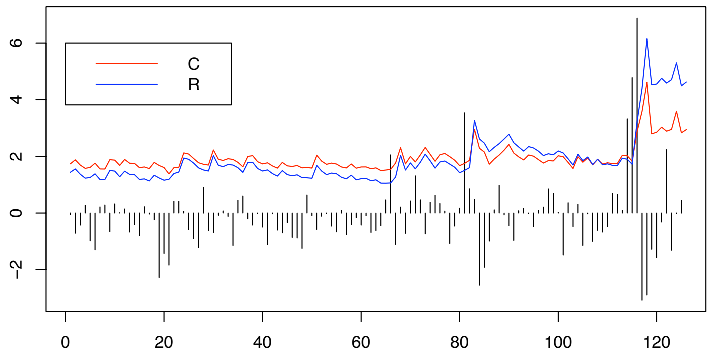
- Zevallos, M. (2008) " Estimación del Riesgo Bursátil Peruano ". *Economia*
- IGBVL: Indice General de la Bolsa de Valores de Lima
- Periodo: 3 de Enero de 2000 a 29 de Diciembre de 2006
- 1744 pérdidas
- Modelo: $\mu_t = c + \rho r_{t-1}$ con Q simétrico

Regresión Cuantilica





Regresión Cuantilica



Regresión Cuantilica

- Reproduce muy bien los aumentos y disminuciones de la serie.
- Tiene mejor reacción *post-stress* que Riskmetrics

4. Evaluación

4.1.

Evaluación

- Criterios
  - Cobertura Incondicional (CI)
  - Independencia y (CI)
  - Funciones de Pérdida

- Tipos de Análisis
- VaR a largo plazo

Evaluación

- Para $t = 1, \dots n$,
$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r_t > VaR, \\ 0 & \text{si} \quad r_t \leq VaR. \end{cases}$$
con $P[r_t \leq VaR] = p$
- *Excepciones*: número de pérdidas mayores que el VaR,
$$Y = \sum_{i=1}^{n} I_t$$
- $Y \sim Bin(n, 1-p)$

Evaluación

- Interesa docimar
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = p_0 \\ H_a &: \quad p \neq p_0 \end{aligned}$$
donde, por ejemplo, $p_0 = 0{,}95, \quad p_0 = 0{,}99$
- Test de Razón de Verosimilitud
$$\begin{aligned} Q &= 2[ylog(y/n) + (n-y)log(1-y/n)] \\ &- 2[ylog(1-p_0) + (n-y)log(p_0)] \end{aligned}$$
- Asintóticamente
$$Q \sim \chi^2_{(1)}$$

Evaluación

- Ventajas
  - Fácil de implementar
  - Proporciona una idea global de desempeño
- Desventajas
  - Test incondicional
  - Poco poder

Evaluación

- I_t sigue una Cadena de Markov con estados 0 y 1
- Probabilidades de Transicion,
$$\pi_{ij} = P[I_t = j | I_t = i], \quad i, j \in \{0, 1\}$$
- Interesa docimar
$$H_0 \quad : \quad \pi_{01} = \pi_{11} = 1 - p_0$$
donde, por ejemplo, $p_0 = 0{,}95, \quad p_0 = 0{,}99$

- Test de Razón de Verosimilitud

$$\begin{aligned} Q &= 2ln\left[\left(1-\frac{n_{01}}{n}\right)^{n_{00}}\left(\frac{n_{01}}{n}\right)^{n_{01}}\left(1-\frac{n_{11}}{n}\right)^{n_{10}}\left(\frac{n_{11}}{n}\right)^{n_{11}}\right] \\ &- 2ln[(p_0)^{n_{10}+n_{00}}(1-p_0)^{n_{11}+n_{01}}] \end{aligned}$$

- n_{ij} = número de pérdidas que pasan del estado i al estado j, donde $i, j \in \{0, 1\}$
- Asintóticamente

$$Q \sim \chi^2_{(2)}$$

Evaluación

- Ventajas
  - Incorpora carácter incondicional de los VaR
  - Rechaza modelos VaR que generan grupos de muy pocas o muchas violaciones
- Desventajas
  - Son necesarios varios cientos de observaciones para que el test sea acurado

Evaluación

- Principio: VaR superestimados producen costos
- Perdidas Cuantilicas,
- Para $t = 1, \ldots n$,

$$QL_t = \begin{cases} (r_t - VaR_t)^2 & \text{si} \quad r_t > VaR, \\ (VaR_{proxy} - VaR_t)^2 & \text{si} \quad r_t \leq VaR. \end{cases}$$

  donde VaR_{proxy} es el p-cuantil empirico del periodo.
- Preferimos el VaR com menor

$$QL = \sum QL_t/n$$

Evaluación

Angelidis et al (2004). Comparación de los métodos A y B para estimar el VaR.

1. Calcular $z_t = QL_t^B - QL_t^A$
2. Hacer la regresión $z_t = c + \varepsilon_t$
3. Docimar $H_0 : c = 0$ utilizando errores estándar robustos a heterocedasticidad y autocorrelación
4. Rechazar la hipótesis nula $QL^A = QL^B$ si obtenemos significancia en (3).

Evaluación

- Evaluar la calidad del VaR ajustado
  - relacionado con análisis *dentro de la muestra*
- Evaluar la capacidad predictiva del VaR
  - relacionado con análisis *fuera de la muestra*

Evaluación

- VaRs condicionales
- Ajuste AR(1)-GARCH(1,1)
- Utilizando los residuos

  N: Normal
  CE: cuantiles empiricos
  TVE: CTVE

- v = pérdidas mayores que el VaR (en %)

Evaluación

Análisis dentro de la muestra

	VaR 95 %			VaR 99 %		
	N	CE	TVE	N	CE	TVE
v	4.16	5.00	5.15	1.21	1.03	0.96
z	2.17	-0.01	-0.41	-1.21	-0.15	0.21
Valor-P*	0.03	0.99	0.68	0.22	0.88	0.83

* z test usual para proporciones

Evaluación

- Riskmetrics *vs* CAViaR
- Análisis fuera de la muestra
  - Parámetros estimados utilizando 2000-2004 y prediccion VaR para 2005
  - Parámetros estimados utilizando 2000-2005 y prediccion VaR para 2006

Evaluación

- Resultados

Cuadro 1: K y C son valores-P de Kupiec y Christoffersen, respectivamente. O es el numero de excepciones y NE es el numero esperado de excepciones

Ano	*Dias*	*NE*	*Riskmetrics*			CAViaR		
			O	K	C	O	K	C
2006	251	2.51	1	0.276	0.553	2	0.737	0.932
2005	251	2.51	9	0.001	0.001	6	0.060	0.003

- CAViaR mejor en términos de función de pérdida

Evaluación

- Regla del Comité de Basilea

  $h = 10$ para datos diarios

- Interesa estimar

  $\text{VaR}^p_{t+k/t}$ = VaR en el tiempo $(t+k)$ basados en la información hasta el instante t

- Con $k = 1$ $\surd$
- Con $k > 1$

- $lr_t = log(P_t) - log(P_{t-1})$
- $lr_t(k)$ = log-retorno del dia $(t+k)$ c.r.a dia t

  $lr_t(k) = log(P_{t+k}) - log(P_t)$
- $lr_t(k) = lr_{t+k} + lr_{t+k-1} + \ldots + lr_{t+1}$
- $r_t = -lr_t$
- $r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$
- $\varepsilon \sim F_\varepsilon$ especificada
- $F_{t+k/t}$ = distribución de $lr_t(k)$

Evaluación

- Problema: $F_{t+k/t}$ no es conocida analiticamente
- Soluciones:
  - Simular la distribución empírica de los excesos, McNeil & Frey (2000), Danielsson & de Vries (1997)
  - Utilizar distribuciones aproximadas

Evaluación

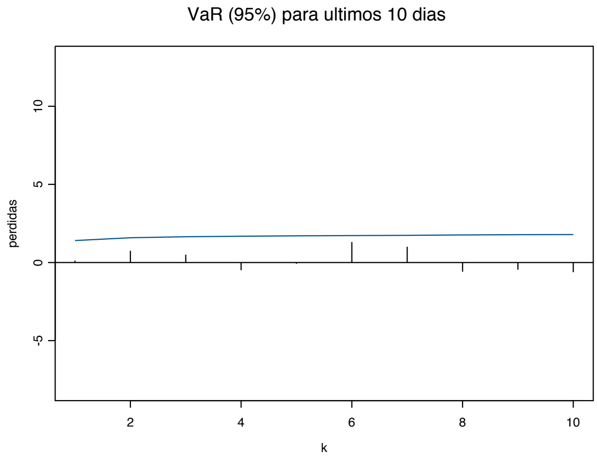
- Sea $\mu_t = 0$
- $\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2$
- Utiliza $F_{t+k/t}$ = Normal
- *Regla de raiz cuadrada*

  $\text{VaR}^p_{t+k/t} = \sqrt{k} z_p \hat{\sigma}_{t+1}$
- Regla no válida

  Si $\mu_t \neq 0$
- Regla de raiz cuadrada no se cumple en muchas series financieras.

Evaluación

- Ajustamos AR(1)-GARCH(1,1) sin considerar las últimas 10 observaciones
- Consideramos distribución condicional Gaussiana
- Sólo calculamos VaR 95 %



5. VaR en Carteras

5.1.

VaR en Carteras

- Carteras
- Métodos
- Aplicación

VaR en Carteras

- Sea C una cartera con dos acciones, A y B
- x_t = pérdidas de la acción A
- y_t = pérdidas de la acción B
- invertimos ω_1 en A
- invertimos ω_2 en B, $(\omega_1 + \omega_2 = 1)$
- Pérdidas de la Cartera

$$r_t = \omega_1 x_t + \omega_2 y_t$$

VaR en Carteras

- Trabajar directamente con r_t
  - Metodologias ya discutidas
- Utilizar los VaR individuales
- Modelamiento Multivariado

- $x_t \sim N(0, \sigma_1^2), \quad y_t \sim N(0, \sigma_2^2)$
- $Corr(x_t, y_t) = \rho$
- VaR de la cartera

$$VaR = \sqrt{VaR_x^2 + VaR_y^2 + 2VaR_x VaR_y \rho}$$

donde VaR$_x$ es el VaR de la acción A VaR$_y$ es el VaR de la acción B

VaR en Carteras
Demostración

- $r_t \sim N(0, \sigma_r^2)$
- VaR= $z_p \sigma_r$, con $\sigma_r^2 = V[r_t]$

$$\begin{aligned}
\sigma_r^2 &= V[\omega_1 x_t + \omega_2 y_t] \\
&= \omega_1^2 V[x_t] + \omega_2^2 V[y_t] + 2\omega_1\omega_2 Cov(x_t, y_t) \\
&= \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 \\
z_p^2 \sigma_r^2 &= (\omega_1 z_p \sigma_1)^2 + (\omega_2 z_p \sigma_2)^2 + 2(\omega_1 z_p \sigma_1)(\omega_2 z_p \sigma_2)\rho
\end{aligned}$$

- Como, VaR$_x = \omega_1 z_p \sigma_1$, VaR$_y = \omega_2 z_p \sigma_2$,

VaR en Carteras
Observaciones

- Para una cartera con k activos, $C = \sum_{i=1}^k \omega_i X_i$

$$VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^k VaR_i^2 + 2\sum_{i<j} \rho_{ij} VaR_i VaR_j}$$

donde ρ_{ij} es la correlación entre las perdidas de los activos i y j

- Fórmula anterior no es válida cuando

  Media diferente de cero

  Distribución diferente a Normal?

VaR en Carteras
Sadefo-Kamdem (2003). Sea $C = \sum_{i=1}^k \omega_i X_i = \omega^t X$ una cartera con k activos donde $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ y $X = (X_1, \ldots, X_k)$. Si X tiene distribución multivariada t-Student con parámetros ν, $E(X) = \mu$, $V(X) = \Sigma$,

$$f(X) = \frac{\Gamma((\nu+k)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{|\Sigma|(\nu k)^k}} \left(1 + \frac{1}{\nu}(X-\mu)^t \Sigma^{-1}(X-\mu)\right)^{-(\nu+k)/2}$$

Entonces el VaR de la cartera es

$$VaR^p = \omega\mu + q_{p,\nu}\sqrt{\omega^t\Sigma\omega}$$

donde $s = q_{p,\nu}$ es la unica solución positiva de la ecuación

$$G(s) = 1 - p,$$

$$G(s) = \frac{1}{\nu\sqrt{\pi}}\left(\frac{\nu}{s^2}\right)^{\nu/2}\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \cdot {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}; 1+\frac{\nu}{2}; \frac{-\nu}{s^2}\right)$$

VaR en Carteras

Algunos valores de $q_{p,\nu}$

ν	$p = 95$	$p = 99$
2	2.92	6.96
7	1.89	3.00
100	1.66	2.36

VaR en Carteras

- Los métodos anteriores no consideran caracteristicas fundamentales en las series financieras:
  - Las varianzas varian en el tiempo
  - Las correlaciones entre los activos evolucionan en el tiempo.

VaR en Carteras

- Sea $X_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$
- Las covarianzas evolucionan como

$$\gamma_{ij,t} = Cov(X_{i,t}, X_{j,t}) = \lambda\gamma_{ij,t-1} + (1-\lambda)X_{i,t-1}X_{j,t-1}$$

- Luego

$$\rho_{ij,t} = Corr(X_{i,t}, X_{j,t}) = \frac{\gamma_{ij,t}}{\gamma_{ii,t}\gamma_{jj,t}}$$

- El VaR de la cartera en el instante t es

$$VaR_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} VaR_{i,t}^2 + 2\sum_{i<j}\rho_{ij,t}VaR_{i,t}VaR_{j,t}}$$

VaR en Carteras

- Nascimento (2007)
- Cartera de 5 activos de BOVESPA,
  PETR4, AMBV4, TLPP4, BBDC4, VALE5
- 3256 observaciones
- Métodos
  - Normal
  - t-Multivariado con $\nu = 5$
  - Riskmetrics en $t = 3256$ con $\lambda = 0{,}90$

- Resultados

Método	95 %	99 %
Normal	18.4	26.0
t-Student	22.6	37.8
Riskmetrics	17.3	24.4

- VaR muy grandes!
- Motivo: correlaciones positivas entre los activos

VaR en Carteras

- Matriz de correlaciones

	PETR4	AMBV4	TLPP4	BBDC4	VALE5
PETR4	1				
AMBV4	0.44	1			
TLPP4	0.60	0.41	1		
BBDC4	0.55	0.44	0.50	1	
VALE5	0.58	0.37	0.52	0.42	1

- Una solución: ponderar con otra cartera correlacionada negativamente

6. Comentarios Finales

6.1.

Comentarios Finales

- Comparación de las metodologias
- VaR y Carteras Optimas
- Expected Shortfall
- Desafios

Comentarios Finales

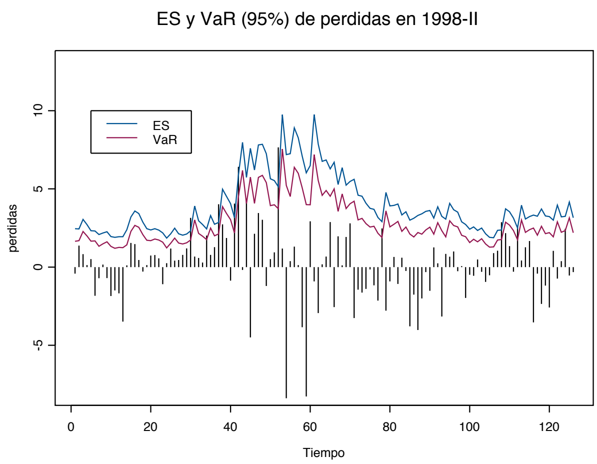
- Evidencia a favor de los métodos condicionales
- Normal condicional subestima para $p < 0{,}95$
- Cuál es mejor entre los otros métodos?
- Considerar la naturaleza de las pérdidas
    - intradiaria
    - diaria
    - semanal
- VaR a largo plazo: cuidado con horizontes muy lejanos

- Problema: establecer las ponderaciones ω_i en la cartera $C = \sum \omega_i x_i$ considerando un cierto VaR de manera de obtener el máximo beneficio
- Problema difícil
  - Optimización estocástica
  - MCMC

Comentarios Finales

- Mayor pérdida esperada
- Al contrario del VaR, ES cumple con axiomas coherentes de medida de riesgo, ver Artzner et al (1997)
- ES incondicional
$$E[r \mid r > VaR^p]$$
- ES en t condicional a la información $\mathcal{F}_{t-1}$
$$E[r_t \mid r_t > VaR^p_{t/t-1}]$$

Comentarios Finales
ES-CTVE en IPSA, 1998-II



Comentarios Finales

- Modelamiento Multivariado considerando
  - Distribuciones marginales condicionales diferentes
  - Reproducir la dependencia temporal entre los activos
- Propuestas
  - Modelos Multivariados de Covarianza Condicional
  - Copulas

- Grupo de Series de Tiempo, Econometria y Finanzas, Departamento de Estatística, UNICAMP
- Rolando Caro, PUC Chile

Referencias Bibliográficas

- Angelidis,T.,Benos,A.,Degiannakis,S.(2004) "The use of GARCH models in VaR estimation". *Statistical Methodology*, 105-128.
- Artzner,P., Delbaen,F. ,Eber, J.,Heath,D. (1999) Çoherent measures of Risk". *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.
- Bollerslev,T., Chou, and Kroner,K.F (1992) .ARCH modelling in Finance". Journal of Econometrics **52** 5-59.
- Bollerslev, T. & Wooldridge, J.M. (1992) "Quasi-Maximun Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances", *Econometric Reviews*, 143-172.
- Caro,R. (2004) .Estimación del Valor en Riesgo en el Mercado Bursátil de Chile". Tesis para optar el Titulo de Ingeniero Estadístico. USACH.
- Christoffersen,P. (1998) .Evaluating interval forecasts". *International Economic Review*, 841-862.
- Danielsson,J. de Vries, C. (1997) "Value at Risk and Extreme Returns". FMG Discussion paper No 273, Financial Markets Group, LSE.

Referencias Bibliográficas

- Diebold, F., Shuermann,T.,Stroughair,J. (1999) "Pitfalls and opportunities in the use of extreme"value theory in risk management". *Advances in Computational Finance*. Kluwer
- Embrechts,P.,Resnick,S.,Samorodnitsky,G. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag.
- Embrechts,P.,Resnick,S.,Samorodnitsky,G. (1999) .Extreme value theory as a risk management tool". *North American Actuarial Journal*, **3** 30-41.
- Engle,R. (1982) .Autoregressive conditional heterocedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations". *Econometrica* **50**, 987-1007.
- Engle,R. and Manganelli,S. (2004) ÇAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles". *Journal of Business & Economic Statistics* **22**, 367-381.
- Fernandez,V. (2003) .Extreme Value Theory and Value at Risk". *Revista de Análisis Económico*, 57-85.
- Franke,J.,Hardle,W.,Stahl,G. (2000) *Measuring Risk in Complex Stochastic Systems*. Lecture Notes in Statistics 147. Springer-Verlag.
- Johnson,C. (2001) "Value at Risk: Teoria y Aplicaciones". *Estudios de Economia*, 217-247.
- Jorion, P.(2001) *Value at Risk*. Second Edition. McGraw Hill.
- Kupiec,P.H. (1995) "Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models". *The Journal of Derivatives*, 73-84.

- McNeil, A.J.,Frey,R. (2000) .Estimation of tail-related risk measures for heterocedastic financial time series: an extreme value approach". *Journal of Empirical Finance*, 271-300.
- Morettin,P.A.(2002) *Series Temporais em Finanças*. Monografias del IMCA, Lima, Perú.
- Nascimento, S.A. (2007) *Calculo do VaR em carteiras* Trabalho de Estagio, Departamento de Estatistica, UNICAMP.
- Palaro,H. (2004) .Aplicacão de acoplamento no cálculo do valor en risco". Tese de Mestrado em Estatística. UNICAMP.
- RiskMetrics (1995) RiskMetrics Technical Document. 3rd Edition, J.P. Morgan.
- Sadefo-Kamdem, J. (2003) Välue at Risk and Expected Shortfall for Linear Portfolios with Elliptically Distributed Risk Factors ". Working paper accesado de www.gloriamundi.org
- SPLUS 6.2. Insightful Corporation.
- Tsay,R. (2002) *Analysis of Financial Time Series*. Wiley.
- Zivot,E. and Wang,J. (2003) *Modelling Financial Time Series with SPLUS*. Insightful Corporation.