ESTIMACIÓN Y TESTS DE HIPÓTESIS EN EL MODELO DE CALIBRACIÓN COMPARATIVA A TRAVÉS DEL MÉTODO DEL SCORE CORREGIDO

Patricia C. Giménez

Departamento de Matemática. Facultad de Cs. Exactas y Naturales.

Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina.

Heleno Bolfarine

Departamento de Estatística. Instituto de Matemática e Estatística.

Universidade de São Paulo. Brasil.

RESUMEN

Los modelos de calibración comparativa son usados frecuentemente para comparar instrumentos o métodos de medición. En este trabajo consideramos el modelo adoptado por Barnett (1969) para este tipo de situaciones, que es reconocido como un caso especial de un modelo de regresión lineal con errores en las variables. Luego, la técnica del score corregido, sugerida por Nakamura (1990) para estimación en modelos con errores en las variables, es aplicada para inferencia en los modelos de calibración comparativa funcional y estructural.

El método produce estimadores consistentes y asintóticamente normales y permite tratar de forma unificada los casos funcional y estructural. Los estimadores son facilmente encontrados a través de un proceso iterativo y su matriz de covariancias asintótica también es obtenida.

A partir de la distribución asintótica de los estimadores son construídos tests de hipótesis para testear la igualdad de las rectas de calibración.

PALABRAS CLAVES: Calibración comparativa, errores en las variables, score corregido, consistencia, normalidad asintótica.

1 Introducción

Los modelos de calibración comparativa son usados frecuentemente para comparar instrumentos o métodos de medición. El término "método" o "instrumento" (de medición) se refiere a diferentes formas de medición de la misma cantidad desconocida.

Supongamos que disponemos de $p+1$ $(p \geq 1)$ instrumentos para medir una característica o respuesta z, en un grupo de n unidades.

Un modelo adoptado en la literatura (ver Barnett, 1969) para este tipo de situaciones es el dado por

$$y_i = \alpha + \beta z_i + \varepsilon_i \qquad (1)$$

$$x_i = z_i + u_i, \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

donde $y_i = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_p})'$, $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_p})'$, $i = 1, \ldots, n$, son vectores aleatorios de dimensión $p \times 1$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)'$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)'$ son los parámetros sobre los cuales deseamos hacer inferencias.

- z_i representa el verdadero valor de la característica de interes en la unidad i, $i = 1, \ldots, n$.
- y_{i_k} corresponde a la medida proporcionada por el intrumento *k* para la característica de la unidad i, $k = 1, \ldots, p$, $i = 1, \ldots, n$.
- α_k y β_k son los sesgos aditivo y multiplicativo del intrumento *k*, respectivamente, $k = 1, \ldots, p$.

La ecuación (2) considera que uno de los instrumentos mide sin sesgo la cantidad desconocida z_i correspondiente al indivíduo *i*. En la literatura (Barnett, 1969) este instrumento es llamado instrumento de referencia o patrón.

Asumimos que $\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \Sigma)$, con $\Sigma =$ $\mathrm{Diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_p^2)$ y $u_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_u^2)$, $i = 1, \ldots, n$.

El modelo dado por (1)-(2) es reconocido como un caso especial de un modelo de regresión lineal con errores en las variables (Kendall y Stuart, 1979 y Fuller, 1987). La ecuación (1) representa un modelo de regresión lineal donde la covariable de interés z_i no es observable directamente por estar sujeta a error de medición. En su lugar, observamos x_i, igual a z_i más un error de medición u_i.

Si las z_i's son constantes fijas, el modelo (1)-(2) corresponde a un modelo lineal funcional con errores en las variables. Cuando las z_i's son una muestra aleatoria de una población con media μ y variancia σ_z^2, no correlacionadas con los ε_{i_k} el modelo es denominado modelo lineal estructural con errores en las variables.

Para p=1 se obtiene el modelo de regresión lineal simple con errores en las variables, ampliamente discutido en la literatura, ver Fuller (1987) y las referencias allí citadas.

Para $p \geq 2$, el modelo estructural (1)-(2) ha sido estudiado por varios autores. Para $p > 2$, los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) no tienen forma explícita. Barnett (1969) propone estimadores usando el método de los momentos. Carter (1981) utiliza estimación de máxima verosimilitud restringida. Theobald y Mallinson (1978) reparametrizan el modelo en la forma de análisis de factores y usan paquetes desarrollados para este tipo de modelos, para obtener los EMV. Fuller (1987) propone un procedimiento iterativo para obtener los EMV y su matriz de covariancias asintótica. Kimura (1992) estudia el modelo funcional normal y encuentra los EMV utilizando un tipo de algoritmo EM. Galea-Rojas (1995) (ver también Bolfarine y Galea-Rojas, 1995) complementa el trabajo de Kimura, presentando los EMV y su distribución asintótica.

Los trabajos citados anteriormente estudian separadamente los modelos estructural y funcional. En este trabajo aplicamos la metodología del score corregido (Nakamura,1990), para tratar ambos tipos de modelos simultaneamente. El método produce estimadores consistentes y asintoticamente normales para los parámetros del modelo y no requiere suposiciones sobre las verdaderas covariables z_i.

2 El método del score corregido para modelos con errores en las variables

Consideremos un modelo donde notamos por $Z = (z_1, \ldots, z_n)'$ el vector de covariables, por $Y = (y_1, \ldots, y_n)'$ la matriz de variables respuesta y por $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)'$ el vector de parámetros desconocidos que deseamos estimar, $\theta \in \Theta$.

Sea

$$\ell(\theta; Z, Y) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\theta; z_i, y_i),$$

la función de log-verosimilitud de θ, dados Z e Y, y

$$U(\theta; Z, Y) = \frac{\partial \ell(\theta; Z, Y)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} U_i(\theta; z_i, y_i),$$

la función score, para $\theta \in \Im$, donde $\Im$ es un subconjunto abierto y conexo de Θ.

Es sabido que bajo condiciones de regularidad apropiadas, el EMV de θ, $\hat{\theta}_Z$, o sea, el valor de θ tal que $U(\theta; Z, Y) = 0$, es consistente y asintoticamente normal (Serfling, 1980). Esta propiedad del EMV se basa en el hecho de que $E[U(\theta_0; Z, Y)] = 0$, donde $\theta_0 \in \Im$ es el verdadero valor del parámetro θ.

Cuando en lugar de z_i, observamos $x_i = z_i + u_i,\ i = 1,\ldots,n$, con u_i's errores de medición aleatorios, independientes de z_i e y_i, la función $U(\theta; X, Y)$, donde simplemente Z es substituído por $X = (x_1,\ldots,x_n)'$ es llamada función score "naive". En general $E[U(\theta_0; X, Y)] \neq 0$, y por lo tanto $\hat{\theta}_X$, solución de $U(\theta; X, Y)$, no es necesariamente un estimador consistente de θ

El método del score corregido (Nakamura, 1990) está basado en la existencia de una función score corregida $U^*(\theta; X, Y)$ tal que

$$E[U^*(\theta; X, Y)|Y, Z] = U(\theta; Z, Y), \quad \forall\, Y, Z, \theta \qquad (3)$$

Sigue de (3) que, $E[U^*(\theta_0; X, Y)] = 0$. Luego, bajo condiciones de regularidad convenientes, existe un estimador $\hat{\theta}$ que llamamos estimador del score corregido, obtenido como solución de $U^*(\theta; X, Y) = \sum_{i=1}^{n} U_i^*(\theta; x_i, y_i) = 0$, que resulta consistente y asintoticamente normal.

Proposición 1: *Sea $U^*(\theta; X, Y)$ una función que satisface la propiedad (3). Bajo condiciones de regularidad apropiadas, existe $\hat{\theta}$, solución de $U^*(\theta; X, Y) = 0$, consistente y asintoticamente normal, con media θ_0 y matriz de covariancias asintótica $n^{-1}\Omega_n(\theta_0)$, donde*

$$\Omega_n(\theta_0) = \overline{\Lambda}_n^{-1}(\theta_0)\overline{\Gamma}_n(\theta_0)\overline{\Lambda}_n^{-1}(\theta_0)'$$

con

$$\overline{\Lambda}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[-\frac{\partial U_i^*(\theta; x_i, y_i)}{\partial \theta}\right]$$

$$\overline{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[U_i^*(\theta; x_i, y_i)U_i^*(\theta; x_i, y_i)']$$

Una prueba de la proposición puede ser encontrada en Giménez y Bolfarine (1997).

A partir de las propiedades asintóticas de $\hat{\theta}$ podemos construir tests de hipótesis asintóticos tipo Wald y Score para testear hipótesis de interés.

Consideremos $\theta = (\lambda', \psi')' \in \mathbb{R}^q$, donde ψ es el vector de parámetros de interés, de dimensión $s \times 1$ y λ es un vector de parámetros "nuisance", de dimensión $(q-s)\times 1$. Asumimos que las matrices $\overline{\Lambda}_n(\theta)$ y $\overline{\Gamma}_n(\theta)$ definidas en la Proposición 1, convergen cuando $n \to \infty$ para matrices definidas positivas $\Lambda(\theta)$ y $\Gamma(\theta)$, respectivamente.

Sean W y Q los estadísticos de los tests tipo Wald y Score, respectivamente, basados en la función score corregida, dados por

$$W = n(\hat{\psi} - \psi_0)' \hat{\Omega}_{\psi\psi}^{-1}(\hat{\theta}_0)(\hat{\psi} - \psi_0), \tag{4}$$

$$Q = n^{-1} U_\psi^*(\hat{\theta}_0)' \hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Omega}_{\psi\psi}^{-1}(\hat{\theta}_0) \hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0) U_\psi^*(\hat{\theta}_0), \tag{5}$$

donde

$$\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0) = \hat{\Lambda}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0) - \hat{\Lambda}_{\psi\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Lambda}_{\lambda\lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0)\hat{\Lambda}_{\lambda\psi}(\hat{\theta}_0),$$
$$\hat{\Omega}(\hat{\theta}_0) = \hat{\Lambda}^{-1}(\hat{\theta}_0)\hat{\Gamma}(\hat{\theta}_0)\hat{\Gamma}^{-1}(\hat{\theta}_0)'$$

La notación $\hat{\Lambda}_{\psi\psi}, \hat{\Lambda}_{\psi\lambda}$, etc, corresponde a la usual para matrices particionadas según las dimensiones de ψ y λ.

$\hat{\theta}_0$ es el estimador del score corregido bajo H_0, o sea, tal que $U_\lambda^*(\hat{\theta}_0) = 0$ y $\hat{\Lambda}(\hat{\theta}_0)$ y $\hat{\Gamma}(\hat{\theta}_0)$ son estimadores consistentes de $\Lambda(\theta_0)$ y $\Gamma(\theta_0)$, respectivamente.

Se puede demostrar (ver Giménez, 1997) que, bajo H_0, W y Q convergen en distribución para una variable aleatoria chi-cuadrado con s grados de libertad.

3 Estimación en el modelo de calibración comparativa

La identificabilidad del modelo (1)-(2) es condición necesaria para la existencia de estimadores consistentes de los parámetros. Una condición que hace el modelo identificable y que asumimos en este trabajo, es el conocimiento de las razones de variancias $\gamma_k = \sigma_k^2/\sigma_u^2$, $k = 1,\ldots,p$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\gamma_k = 1$, $k = 1,\ldots,p$, o sea $\sigma_k^2 = \sigma_u^2 = \phi$, $k = 1,\ldots,p$, por lo tanto $\Sigma = \phi I_p$, donde I_p representa la matriz identidad $p \times p$. Los q=2p+1 parámetros estructurales del modelo son dados por $\theta = (\alpha', \beta', \phi)'$.

La función de log-verosimilitud "no observada" $\ell(\theta; Z, Y)$ para el modelo (1)-(2) puede ser escrita como $\ell(\theta; Z, Y) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\theta; z_i, y_i)$, donde

$$\ell_i(\theta; z_i, y_i) = -\frac{p}{2}\log(2\pi) - \frac{p}{2}\log\phi - \frac{1}{2\phi}(y_i - \alpha - \beta z_i)'(y_i - \alpha - \beta z_i),$$

i= 1,..., n.

Luego, $U_i(\theta) = (U_{i\alpha}(\theta)', U_{i\beta}(\theta)', U_{i\phi}(\theta))'$, donde

$$U_{i\alpha}(\theta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\phi}(y_i - \alpha - \beta z_i),$$
$$U_{i\beta}(\theta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \beta} = \frac{1}{\phi}(y_i - \alpha - \beta z_i) z_i,$$
$$U_{i\phi}(\theta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \phi} = -\frac{p}{2\phi} + \frac{1}{2\phi^2}(y_i - \alpha - \beta z_i)'(y_i - \alpha - \beta z_i),\ i = 1,\ldots,n.$$

Considerando $U_i^*(\theta) = (U_{i\alpha}^*(\theta)', U_{i\beta}^*(\theta)', U_{i\phi}^*(\theta))'$, donde

$$U_{i\alpha}^*(\theta) = \frac{1}{\phi}(y_i - \alpha - \beta x_i),$$

$$U_{i\beta}^*(\theta) = \frac{1}{\phi}(y_i - \alpha - \beta x_i)x_i + \beta,$$

$$U_{i\phi}^*(\theta) = \frac{1}{2\phi^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)'(y_i - \alpha - \beta x_i) - \frac{1}{2\phi}(\beta'\beta + p),\ i = 1,\dots,n,$$

tenemos que

$$E[U_i^*(\theta; x_i, y_i)|z_i, y_i] = U_i(\theta; z_i, y_i),\ i = 1,\dots,n,$$

y por lo tanto, $U^*(\theta; X, Y) = \sum_{i=1}^n U_i^*(\theta; x_i, y_i)$ es un score corregido.

Resolviendo la equación $U^*(\theta; X, Y) = 0$, obtenemos los estimadores del score corregido como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\alpha = \overline{y} - \beta\overline{x}, \tag{6}$$

$$S_{xy} - \beta S_{xx} + \beta\phi = 0, \tag{7}$$

$$\phi = \frac{1}{(\beta'\beta + p)}\sum_{k=1}^{p}(S_{y_k y_k} + \beta_k^2 S_{xx} - 2\beta_k S_{xy_k}). \tag{8}$$

donde

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i,$$

$$S_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2, \quad S_{xy} = (S_{xy_1},\dots,S_{xy_p})' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}),$$

$$S_{yy} = (S_{y_k y_l})_{k,l=1,\dots,p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})'.$$

La solución del sistema de ecuaciones (6)-(8) es obtenida facilmente a través del siguiente proceso iterativo:

Sea $\hat{\beta}^{(m)} = (\hat{\beta}_1^{(m)},\dots,\hat{\beta}_p^{(m)})'$ solución de (7) en la m-ésima iteración, en la iteración $m+1$ el algoritmo continúa de la siguiente manera:

Etapa 1: Calcule $\hat{\phi}^{(m+1)} = \phi(\hat{\beta}^{(m)})$, según la expresión (8).

Etapa 2: Calcule $\hat{\beta}_k^{(m+1)}$, $k = 1,\dots,p$, como solución de

$$S_{xy_k} - \beta_k S_{xx} + \beta_k\hat{\phi}^{(m+1)} = 0,$$

o sea,

$$\hat{\beta}_k^{(m+1)} = \frac{S_{xy_k}}{S_{xx} - \hat{\phi}^{(m+1)}}, \quad k = 1, \dots, p.$$

La estimación de α que no precisa del proceso iterativo, es obtenida a partir de (6).

El sistema (6)-(8) tiene raíces múltiples y por lo tanto la elección de la raíz apropiada debe ser hecha cuidadosamente, pues pueden existir raíces que no son consistentes. Comenzando el proceso iterativo con el estimador "naive" de β, dado por $\hat{\beta}^{(0)} = (\hat{\beta}_1^{(0)}, \dots, \hat{\beta}_p^{(0)})'$ con $\hat{\beta}^{(0)} = S_{xy_k} / S_{xx}$, $k = 1,2$, en la práctica, en dos o tres iteraciones se obtiene la raíz apropiada (Stefanski, 1989).

Las condiciones de regularidad impuestas para la validez de los resultados asintóticos (Giménez y Bolfarine, 1997) implican asumir el siguiente comportamiento de las verdaderas covariables z_i,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \to \mu < \infty, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \to \nu^2 < \infty, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{9}$$

Luego, después de algunos cálculos, tenemos que $\overline{\Lambda}(\theta) \to \Lambda(\theta)$ y $\overline{\Gamma}(\theta) \to \Gamma(\theta)$, cuando $n \to \infty$, donde

$$\Lambda(\theta) = \frac{1}{\phi}\begin{pmatrix} A \otimes I_p & (0,-1)' \otimes \beta \\ 0 & \dfrac{\beta'\beta + p}{2\phi} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(\theta) = \frac{1}{\phi}\begin{pmatrix} (A + 2B)\beta\beta' + (A + B)I_p & (C \otimes \beta \\ (C' \otimes \beta') & \dfrac{1}{2}(\beta'\beta)^2 + \beta'\beta + \dfrac{p}{2} \end{pmatrix},$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & \nu^2 + \mu^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}, \quad C = -\begin{pmatrix} 0 \\ \beta'\beta + 1 \end{pmatrix}.$$

donde $\otimes$ denota el producto de Kronecker entre matrices.

Finalmente, obtenemos la matriz de covariancias asintótica de $\hat{\theta}$, $n^{-1}\Omega(\theta_0)$, donde

$$\Omega(\theta) = \Lambda^{-1}(\theta)\Gamma(\theta)\Lambda^{-1}(\theta)' = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_2' & \Omega_3 \end{pmatrix},$$

con

$$\Omega_1 = F \otimes (\beta\beta') + G \otimes I_p,$$
$$\Omega_2 = H \otimes \beta,$$
$$\Omega_3 = \frac{2\phi^2}{(\beta'\beta + p)^2}[(\beta'\beta)^2 + 2(\beta'\beta) + p],$$

$$F = \begin{pmatrix} \nu^2\phi a^2 + (\nu^2\phi a^2 + b)\mu^2 & -\mu(\nu^2\phi a^2 + b) \\ -\mu(\nu^2\phi a^2 + b) & \nu^2\phi a^2 + b \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \nu^4 + (\nu^2 + \phi)\mu^2 & -\mu(\nu^2 + \phi) \\ -\mu(\nu^2 + \phi) & \nu^2 + \phi \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{(p-a)b}{p\nu^2 a^2}\begin{pmatrix} -\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a = \beta'\beta + p$ y $b = 2p(p-1)\phi^2$.

4 Tests de hipótesis de igualdad de las rectas de calibración

Particularmente interesa testear si los instrumentos miden sin sesgo la característica de interés z, o sea, la hipótesis

$$H_0 : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_p \end{pmatrix}$$

en presencia del parámetro "nuisance" ϕ, donde $1_p = (1, \ldots, 1)'$.

En la notación de la Sección 2, $\psi = (\alpha', \beta')', \lambda = \phi, q = 2p + 1$ y $s = 2p$.

Para testear H_0, consideramos los estadísticos de Wald W y Score Q, definidos en (4) y (5), con distribución asintótica χ^2_{2p}.

El estimador del score corregido, restringido a H_0, es dado por $\hat{\theta} = (0', 1'_p, \hat{\theta}_0)'$, donde

$$\hat{\phi}_0 = \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p}(S_{y_k y_k} + S_{xx} - 2S_{xy_k}).$$

El estadístico del test de Wald W puede ser escrito como

$$W = n(\alpha', (\hat{\beta} - 1_p)')\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)'(\alpha', (\hat{\beta} - 1_p)')' \tag{10}$$

Después de algunos cálculos, tenemos que $\Omega^{-1}_{\psi\psi}$ puede ser escrita como

$$\Omega^{-1}_{\psi\psi}(\theta)=\frac{1}{\phi}\begin{pmatrix}(I_p+\beta\beta')^{-1} & \mu(I_p+\beta\beta')^{-1}\\ \mu(I_p+\beta\beta')^{-1} & \mu^2(I_p+\beta\beta')^{-1}+\dfrac{\nu^4}{\nu^2+\phi}(I_p+r\beta\beta')^{-1}\end{pmatrix},$$

donde

$$r=\frac{1}{\nu^2+\phi}\left[\nu^2+\frac{2p(p-1)\phi}{(\beta'\beta+p)^2}\right].$$

Para estimar $\Omega^{-1}_{\psi\psi}$ consistentemente, basta obtener estimadores consistentes de μ e ν^2. Por la suposición (9) y la ley debil de los grandes números, tenemos que

$$\bar{x}\xrightarrow{p}\mu \quad \text{y} \quad S_{xx}-\phi\xrightarrow{p}\nu^2,\ \text{cuando } n\longrightarrow\infty.$$

Por lo tanto, W puede ser reescrito como

$$W=\frac{n}{\hat{\phi}_0}\{\hat{\alpha}'(I_p+1_p1_p')^{-1}\hat{\alpha}+2\bar{x}\hat{\alpha}'(I_p+1_p1_p')^{-1}(\hat{\beta}-1_p)$$
$$+(\hat{\beta}-1_p)'[\bar{x}^2(I_p+1_p1_p')^{-1}+\frac{(S_{xx}-\hat{\phi}_0)^2}{S_{xx}}(I_p+\hat{r}1_p1_p')^{-1}](\hat{\beta}-1_p)\} \tag{11}$$

$$\hat{r}=1-\frac{(p+1)\hat{\phi}_0}{2pS_{xx}}.$$

Por otro lado, tenemos que el estadístico del test Score Q, está dado por

$$Q=n^{-1}U^*_{\psi}(\hat{\theta}_0)'\hat{\Lambda}^{-1}_{\psi\psi.\phi}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)\hat{\Lambda}^{-1}_{\psi\psi.\phi}(\hat{\theta}_0)U^*_{\psi}(\hat{\theta}_0), \tag{12}$$

donde el score corregido obtenido en la Sección 3 puede ser reescrito como

$$U^*_{\psi}(\hat{\theta}_0)=\frac{n}{\hat{\phi}_0}\begin{pmatrix}\bar{y}-1_p\bar{x}\\ S_{xy}+\bar{x}\bar{y}-1_p(S_{xx}-\phi+\bar{x}^2)\end{pmatrix}.$$

y $\Lambda^{-1}_{\psi\psi.\phi}=\phi_0(A^{-1}\otimes I_p)$, con A definida en la Sección 3.

Finalmente, después de algunos cálculos obtenemos

$$
\begin{aligned}
Q = \frac{n}{\hat{\phi}_0}\{ & (\bar{y} - 1_p\bar{x})'[(I_p + 1_p1_p')^{-1} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}(I_p + \hat{r}1_p1_p')^{-1}](\bar{y} - 1_p\bar{x}) \\
& - \frac{2\bar{x}}{S_{xx}}[S_{xy} + \bar{x}\bar{y} - 1_p(S_{xx} - \hat{\phi}_0 + \bar{x}^2)]'(I_p + \hat{r}1_p1_p')^{-1}(\bar{y} - 1_p\bar{x}) \\
& + \frac{1}{S_{xx}}[S_{xy} + \bar{x}\bar{y} - 1_p(S_{xx} - \hat{\phi}_0 + \bar{x}^2)]'(I_p + \hat{r}1_p1_p')^{-1}[S_{xy} + \bar{x}\bar{y} \\
& - 1_p(S_{xx} - \hat{\phi}_0 + \bar{x}^2)]\}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

5 Ilustración numérica

Ilustramos los resultados obtenidos en las secciones anteriores considerando el problema de calibración comparativa presentado en Jaech (1985). En un experimento, 43 partes cilíndricas de uranio sintetizado fueron medidas por varios métodos (usamos los datos correspondientes a 3 métodos). Más detalles del experimento pueden ser encontrados en la referencia citada anteriormente.

Es asumido que el método 1 mide la verdadera cantidad sin sesgo y estamos interesados en saber si existe sesgo en las mediciones obtenidas por los métodos 2 y 3.

Consideramos el modelo (1)-(2) con $n = 43$ y $p = 2$.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = 4.397, \quad \bar{y} = (4.370, 4.436)' \\
&S_{xx} = 0.04391, \quad S_{xy} = (0.03449, 0.03933)' \quad \text{y} \\
&S_{yy} = \begin{pmatrix} 0.04013 & 0.03483 \\ 0.03483 & 0.06442 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema (6)-(8), obtenemos los siguientes estimadores del score corregido

$$
\begin{aligned}
&\hat{\alpha} = (-0.21963, -0.79769)', \\
&\hat{\beta} = (1.04381, 1.19029)' \quad \text{y} \\
&\hat{\phi} = 0.01397.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, las estimaciones de máxima verosimilitud y de momentos para el parámetro β son dadas por (0.92157, 1.21191)' y (0.88558, 1.00986)', respectivamente (ver Galea-Rojas, 1995). Observamos que la estimación del score corregido del parámetro β está más próxima de la estimación de máxima verosimilitud que la de momentos.

Finalmente, usando (11) y (13) obtenemos los valores de los estadísticos de Wald W= 10.46 y Score Q =10.62, con 4 grados de libertad. A un nivel de 5 % concluimos que los métodos 2 y 3 miden con sesgo la densidad de uranio sintetizado. El valor del estadístico de Wald basado en el EMV es 11.38.

6 Conclusiones

En la literatura sobre inferencia en el modelo de calibración comparativa se encuentra un tratamiento diferenciado de los casos funcional y estructural. Una de las ventajas de la aplicación de la técnica del score corregido es que permite tratar simultaneamente ambos tipos de modelos, ya que no requiere suposiciones sobre las verdaderas covariables z_i. Por otra parte, Gleser (1983) muestra, en el caso de modelos de regresión lineales, que no es necesario tratar los dos tipos de modelos separadamente. Consistencia y normalidad asintótica de estimadores en un modelo funcional bajo las condiciones (9), implican resultados similares para tales estimadores en un modelo estructural asociado, donde las z_i son variables aleatorias con media μ y variancia ν^2.

El procedimiento iterativo descripto en la Sección 3 es de fácil implementación y en la práctica, tomando como valor inicial el estimador "naive" del parámetro β, en pocas iteraciones es obtenida la solución buscada.

Para $p \leq 2$ es posible obtener soluciones explícitas para el sistema (6)-(8). Para $p=1$, se obtiene como caso particular el modelo de regresión lineal simple. Para este modelo, en el caso funcional, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ coinciden con los EMV para α y β, respectivamente, $\hat{\phi}$ siendo consistente, es diferente del EMV, que resulta inconsistente (Lindley, 1947). $\hat{\phi}$ corresponde al estimador de momentos en el modelo funcional. En el caso del modelo estructural, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ y $\hat{\phi}$ coinciden con los EMV y los estimadores de momentos (ver Cheng y Van Ness, 1994).

REFERENCIAS

BARNETT, V.D. (1969). Simultaneous pairwise linear structural relationship. *Biometrics* 25, 129-142.

BOLFARINE, H. and GALEA-ROJAS, M. (1995). Comments on "Functional comparative calibration using an EM algorithm" (by D.K.Kimura). *Biometrics*, 51, 1579-1580.

CARTER, R. (1981). Restricted maximum likelihood estimation of bias and reliability in the comparison of several measuring methods. *Biometrics,* 37, 733-741.

CHENG, C.L. and VAN NESS, J.W. (1994). On estimating linear relationships when both variables are subject to errors. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 56, 167-183.

FULLER, W.A. (1987). *Measurement Error Models*. John Wiley & Sons, New York.

GALEA-ROJAS, M. (1995). *Calibracão Comparativa Estrutural e Funcional.* Tese, IME-USP.

GIMENEZ, P. and BOLFARINE, H. (1997). Corrected score functions in classical error in variables and incidental parameter estimation. *Australian Journal of Statistics*, 39, 325-344.

GIMENEZ, P. (1997). *Inferência em modelos com erros nas variáveis através do método do escore corrigido.* Tese, IME-USP.

GLESER, L.J. (1983). Functional, structural and ultrastructural errors-in-variables model. In *Proc. Bus. Econ. Statist. Sect., Am. Statist. Assoc.*, 57-66.

JAECH, J.L. (1985). *Statistical Analysis of Measurement Errors.* Exxon Monographs. New York: John Wiley.

KENDALL, M.G. and STUART, A. (1979). *The Advanced Theory of Statistics, 2.* 4.ed. New York: Hafner.

KIMURA, D.K. (1992). Functional comparative calibration using an EM algorithm. *Biometrics*, 48, 1263-1271.

LINDLEY, D.V. (1947). Regression lines and the linear functional relationship. *Suppl. Journal of Royal Statistical Society*, 9, 218-244.

NAKAMURA, T. (1990). Corrected score functions for error-in-variables models: methodology and application to generalized linear models. *Biometrika*, 77, 127-137.

SERFLING, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* John Wiley & Sons, New York.

STEFANSKI, L.A. (1989). Unbiased estimation of a nonlinear function of a normal mean with application to measurement error models. *Communications in Statistics*, Series A, 18, 4335-4358.

THEOBALD, C.M. and MALLINSON, J.R. (1978). Comparative calibration, linear structural relationship and congeneric measurement. *Biometrics,* 34, 39-45.